

TD Calculus II - Nombres Complexes

Exercice 11 : On pose $z := (1 + i)$. On commence par calculer le module de z :

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Ensuite, on calcule l'argument de z . Pour cela, on calcule

$$\frac{z}{|z|} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}},$$

d'où

$$\arg z = \frac{\pi}{4}.$$

Enfin, on a que

$$(1 + i)^n = z^n = |z|^n e^{in \arg z} = 2^{n/2} e^{in \frac{\pi}{4}},$$

et donc

$$|(1 + i)^n| = |z|^n = 2^{n/2}, \quad \arg((1 + i)^n) = n \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 17 : 1. *Calcul algébrique :* Pour un quotient du type $\frac{z_1}{z_2}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\bar{z}_2$, et on trouve

$$\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}} = \frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2} \times \frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}{1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)).$$

Calcul trigonométrique : On reconnaît que $\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$. On en déduit

$$\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}} = e^{i\frac{\pi}{3} - i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

On trouve ainsi que

$$\begin{cases} \Re(e^{i\frac{\pi}{12}}) = \Re\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1))\right) \\ \Im(e^{i\frac{\pi}{12}}) = \Im\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1))\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin \frac{\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

et donc $\tan \frac{\pi}{12} = \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}} = 2 - \sqrt{3}$.

2. On cherche z sous la forme $z = |z|e^{i\theta}$. On a $|z^{24}| = |z|^{24} = 1$, donc $|z| = 1$ (le module ne peut pas être négatif par définition). Il reste à trouver θ tel que $z^{24} = e^{i24\theta} = 1$. Mais $1 = e^{i2\pi k}$, pour k dans $\mathbb{N}$. Ainsi, $\theta = 2\pi \frac{k}{24}$, modulo 2π , c'est à dire pour $n \in \{0, \dots, 23\}$ et donc les racines de $z^{24} = 1$ sont $e^{2\pi i \frac{k}{24}}$.

Exercice 18 : On pose $\sigma_n := \sum_{k=0}^n e^{ikt}$ et on remarque que $S_n = \Re(\sigma_n)$.

1. On pose $q = e^{it}$ et on remarque maintenant que $\sigma_n = \sum_{k=0}^n q^k$. Il s'agit de la somme des $n+1$ premier termes d'une série géométrique de raison q et on a (formule à connaître) :

$$\sigma_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1}.$$

Comme on l'a déjà fait dans d'autres exercices, on a

$$e^{i(n+1)t} - 1 = e^{i\frac{(n+1)t}{2}} \left(e^{i\frac{(n+1)t}{2}} - e^{-i\frac{(n+1)t}{2}} \right) = e^{i\frac{(n+1)t}{2}} \left(2i \sin \left(\frac{(n+1)t}{2} \right) \right),$$

et

$$e^{it} - 1 = e^{i\frac{t}{2}} \left(e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}} \right) = e^{i\frac{t}{2}} \left(2i \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right).$$

Alors

$$\sigma_n = \frac{e^{i\frac{(n+1)t}{2}} \left(2i \sin \left(\frac{(n+1)t}{2} \right) \right)}{e^{i\frac{t}{2}} \left(2i \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right)} = e^{i\frac{(n+1)t}{2} - i\frac{t}{2}} \frac{\sin \left(\frac{(n+1)t}{2} \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} = e^{i\frac{nt}{2}} \frac{\sin \left(\frac{(n+1)t}{2} \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)}.$$

Enfin,

$$S_n = \Re(\sigma_n) = \cos \left(\frac{nt}{2} \right) \frac{\sin \left(\frac{(n+1)t}{2} \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)}.$$

2. Puisque $\sin$ et $\cos$ sont toujours inférieurs à 1 en valeur absolue et que $\sin \left(\frac{t}{2} \right)$ ne s'annule pas car $t \in]0, \pi[$, il vient

$$|S_n| = \left| \cos \left(\frac{nt}{2} \right) \right| \frac{\left| \sin \left(\frac{(n+1)t}{2} \right) \right|}{\left| \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right|} \leq \frac{1}{\left| \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right|}.$$

Exercices 20, 21 et 22 : Corrections dans *Exo 7. Cours d'algèbre de 1ère année* (voir Ch. 3 sur les nombres complexes).